

GIẢI TÍCH 12 – CHƯƠNG 3

§3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

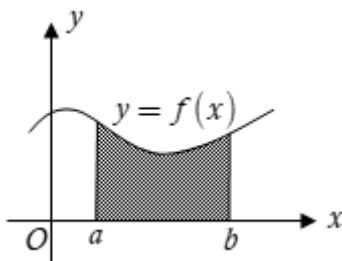
A. PHẦN KIẾN THỨC CHÍNH

I. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

1. Hình phẳng giới hạn bởi 1 đường cong và trục hoành.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành

và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định $S = \int_a^b |f(x)| dx$.



$$\text{Ta có (H): } \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Ví dụ 1: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x + 4$, trục hoành, các đường thẳng $x = -2$, $x = 0$.

Lời giải

Diện tích S của hình phẳng trên là $S = \int_{-2}^0 |2x + 4| dx$.

Xét dấu

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x + 4$		$-$ 0 $+$	

Ta thấy $2x + 4 \geq 0$, $\forall x \in [-2; 0]$ nên $S = \int_{-2}^0 |2x + 4| dx = \int_{-2}^0 (2x + 4) dx = (x^2 + 4x) \Big|_{-2}^0 = 4$.

Ví dụ 2: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{-x-2}{x-1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = -1$; $x = 0$.

Lời giải

Diện tích S của hình phẳng trên là $S = \int_{-1}^0 \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx$

Xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$\frac{-x-2}{x-1}$		$-$ 0 $+$	$\parallel$	$-$

Ta thấy $\frac{-x-2}{x-1} > 0 \quad \forall x \in [-1; 0]$ nên $S = \int_{-1}^0 \left| \frac{-x-2}{x-1} \right| dx = \int_{-1}^0 \frac{-x-2}{x-1} dx = \int_{-1}^0 \left(-1 - \frac{3}{x-1} \right) dx = 3 \ln 2 - 1$.

Ví dụ 3: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và trục hoành.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Diện tích S của hình phẳng trên là $S = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \left| \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx \right| = \frac{1}{6}$.

Chú ý:

➤ Nếu đề bài chưa cho $x = a, x = b$ (cận tích phân) thì ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ để tìm cận tích phân.

➤ Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì $S = \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

➤ Phương pháp trắc nghiệm:

+ Xác định các yếu tố cần thiết như công thức $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$.

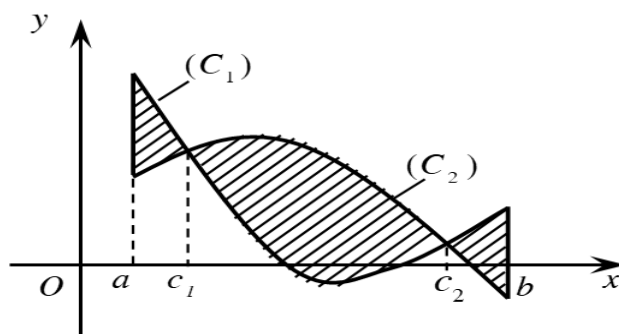
+ Khi đó $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

+ Sử dụng chức năng tính tích phân có sẵn trong máy tính Casio để tính.

2. Hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$

và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.



Ta có (H): $\begin{cases} y = f_1(x) & (C_1) \\ y = f_2(x) & (C_2) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Ví dụ 1: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 2, x = 0, x = 1$.

Lời giải

Gọi S là diện tích cần tìm. Ta có $S = \int_0^1 |e^x - 2| dx$.

Xét $e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

Bảng xét dấu $e^x - 2$ như sau:

x	0	$\ln 2$	1	
$e^x - 2$		-	0	+

$$\text{Ta có } S = \int_0^1 |e^x - 2| dx = - \int_0^{\ln 2} (e^x - 2) dx + \int_{\ln 2}^1 (e^x - 2) dx = (2x - e^x) \Big|_0^{\ln 2} + (e^x - 2x) \Big|_{\ln 2}^1$$

$$= 4\ln 2 + e - 5.$$

Vậy $S = 4\ln 2 + e - 5$.

Ví dụ 2. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \cdot \ln x$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là $x \ln x - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; e] \\ x = e \in [1; e] \end{cases}$.

Diện tích S của hình phẳng trên là

$$S = \int_1^e |x \ln x - x| dx = \int_1^e (-x \ln x + x) dx = - \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e x dx = \frac{e^2 - 3}{4}.$$

Ví dụ 3: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $y = x - 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $y = x - 1$ là

$$x^2 - 3x + 2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra diện tích của hình phẳng trên là } S = \int_1^3 |x^2 - 3x + 2 - (x - 1)| dx = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx = \frac{4}{3}.$$

Chú ý:

➤ Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số chính là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm số đó.

➤ Nếu đề bài chưa cho $x = a$, $x = b$ (cận tích phân) thì ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ để tìm cận tích phân.

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 1 trang 123 – SGK. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường:

a) $y = x^2$, $y = x + 2$.

b) $y = |\ln x|$, $y = 1$

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = x + 2$ là

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-1}^2 |x^2 - (x + 2)| dx = \left| \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \right|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = |\ln x|$ và $y = 1$ là

$$|\ln x| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e \\ x = \frac{1}{e} \end{cases}.$$

$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm là } S = \int_{\frac{1}{e}}^e ||\ln x| - 1| dx = \left| \int_{\frac{1}{e}}^e (|\ln x| - 1) dx \right|.$$

Ta có

$$\int_{\frac{1}{e}}^e (|\ln x| - 1) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\ln x - 1) dx + \int_1^e (\ln x - 1) dx = (-\ln x - 1)x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 dx + (\ln x - 1)x \Big|_1^e + \int_1^e dx = 2 - \frac{1}{e} - e$$

$$\text{Vậy } S = e + \frac{1}{e} - 2.$$

Bài 2 trang 123 – SGK. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$; tiếp tuyến của đường này tại điểm $M(2; 5)$ và trục Oy .

Lời giải

$$\text{Ta có } y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow y'(2) = 4$$

Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^2 + 1$ tại điểm $M(2; 5)$ là

$$y = 4(x - 2) + 5 \text{ hay } y = 4x - 3$$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích hình phẳng cần tìm là } S &= \int_0^2 |x^2 + 1 - 4x + 3| dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

II. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: [Mức độ 1] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ đường thẳng $x = a; x = b$ và trục Ox được tính bởi công thức:

A. $S = \int_a^b f(x) dx.$

B. $S = \int_a^b |f(x)| dx.$

C. $S = \int_b^a f(x) dx$

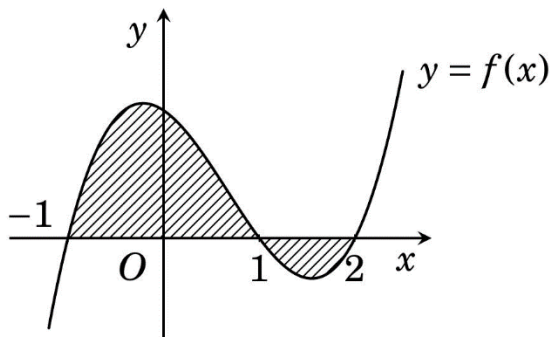
D. $S = \int_b^a |f(x)| dx.$

Lời giải

Chọn B

Theo công thức (SGK cơ bản) ta có: $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

Câu 2: [Mức độ 2] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$; $x = -1$ và $x = 2$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

B. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

D. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

Câu 3: [Mức độ 2] Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$; $y = 3x - 2$ được tính theo công thức

A. $S = \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx$.

B. $S = -\int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx$.

C. $S = \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx$.

D. $S = \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx$.

Lời giải

Chọn B

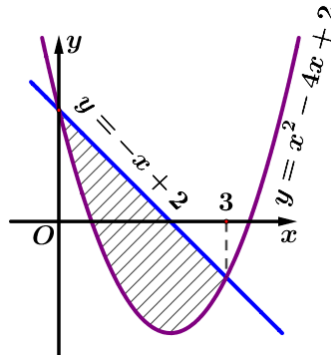
Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = x^2$ và $y = 3x - 2$ là

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Mặt khác, $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, $\forall x \in [1; 2]$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx = -\int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx.$$

Câu 4: [Mức độ 1] Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?



A. $\int_0^3 (x^2 - 3x) dx.$

B. $\int_0^3 (-x^2 + 3x) dx.$

C. $\int_0^3 (x^2 - 4x + 2) dx - \int_0^3 (-x + 2) dx.$

D. $\int_0^3 (-x + 2) dx + \int_0^3 (x^2 - 4x + 2) dx.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^3 [(-x + 2) - (x^2 - 4x + 2)] dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx.$

Câu 5: [Mức độ 1] Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 3$ là:

A. $\frac{243}{5}$ (đvdt).

B. $\frac{244}{5}$ (đvdt).

C. $\frac{242}{5}$ (đvdt).

D. $\frac{1}{5}$ (đvdt)

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^3 |x^4| dx = \int_{-1}^3 x^4 dx = \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-1}^3 = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{244}{5}.$

Câu 6: [Mức độ 1] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x}$, trục hoành, hai đường thẳng $x = 1$ và $x = 2$ là.

A. $\ln 2.$

B. $\ln 2 - 1.$

C. $\ln 2 + 1.$

D. $1 - \ln 2.$

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Suy ra $S = \int_1^2 \left| \frac{x-1}{x} \right| dx = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx = \left| \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right| = \left| (x - \ln x) \Big|_1^2 \right| = 1 - \ln 2.$

Câu 7: [Mức độ 2] Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$ được tính bởi công thức:

A. $\int_0^2 (x - x^2) dx.$

B. $\int_1^2 (x^2 - x) dx - \int_0^1 (x^2 - x) dx.$

C. $\int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx.$

D. $\int_0^1 (x^2 - x) dx.$

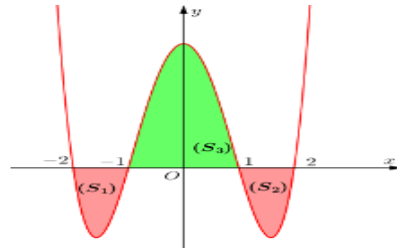
Lời giải:

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow S = -\int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx.$

Câu 8: [Mức độ 2] Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ như hình vẽ ở bên và có diện tích

$S_1 = S_2 = \frac{22}{15}, S_3 = \frac{76}{15}.$ Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$



A. $I = \frac{32}{15}.$

B. $I = 8.$

C. $I = \frac{18}{5}.$

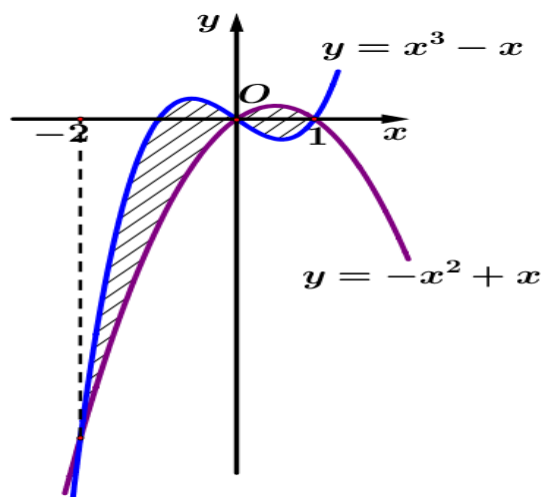
D. $I = -\frac{32}{15}.$

Lời giải:

Chọn A

Ta có $I = \int_{-2}^2 f(x) dx = S_3 - S_1 - S_2 = \frac{76}{15} - 2 \cdot \frac{22}{15} = \frac{32}{15}.$

Câu 9: [Mức độ 2] Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào?



A. $\int_{-2}^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx.$

B. $\int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx.$

C. $\int_{-2}^1 (-x^3 - x^2 + 2x) dx.$

D. $\int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx + \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx.$

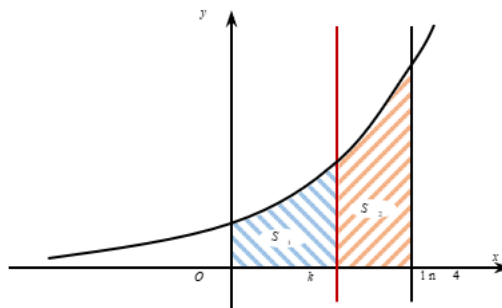
Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là

$$\int_{-2}^1 \left| (x^3 - x) - (-x^2 + x) \right| dx = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx.$$

Câu 10: [Mức độ 3] Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$.

B. $k = \ln 2$.

C. $k = \ln \frac{8}{3}$.

D. $k = \ln 3$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - 1$ và $S_2 = \int_k^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_k^{\ln 4} = 4 - e^k$.

Ta có $S_1 = 2S_2 \Leftrightarrow e^k - 1 = 2(4 - e^k) \Leftrightarrow k = \ln 3$.

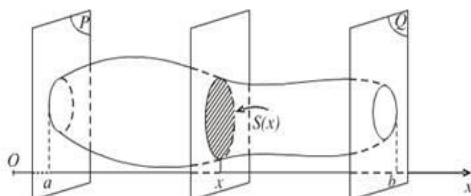
III. TÍNH THỂ TÍCH

1. Thể tích của vật thể.

Khái niệm:

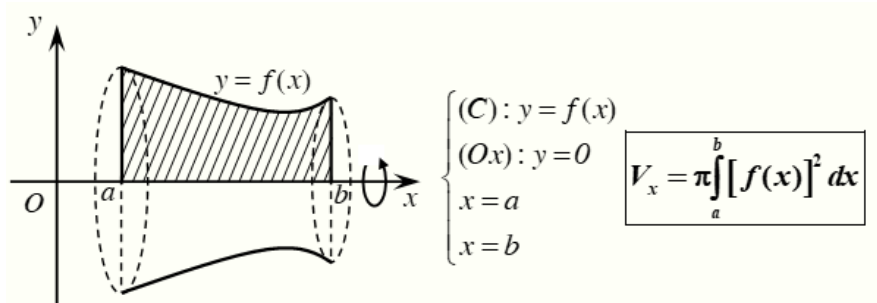
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b ; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Người ta chứng minh được thể tích vật thể V của phần vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) được tính bởi công thức: $V = \int_a^b S(x) dx$



2. Thể tích khối tròn xoay.

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :



Ví dụ 1: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành là:

$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx = \pi \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} x\sqrt{x} + x \right) \Big|_1^4 = \frac{7\pi}{6}.$$

Ví dụ 2: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 1$ và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi hình (H) quay quanh trục Ox.

Lời giải:

$$\text{Thể tích khối tròn xoay là } V = \pi \int_0^1 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 3: Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành.

Lời giải

$$\text{Thể tích khối tròn xoay cần tính là } V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\pi \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

Ví dụ 4: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ ta có

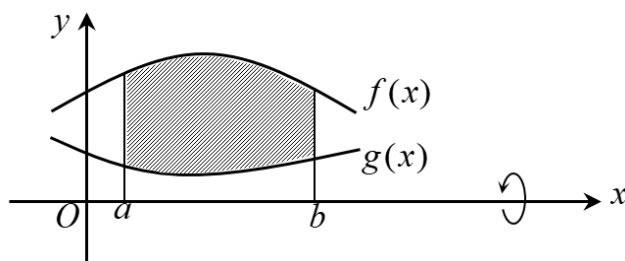
$$x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do $x^2 - 2x < 0$ với $0 < x < 2$ nên $2x - x^2 > 0$ với $0 < x < 2$.

Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) xung quanh trục hoành thì

$$V = \pi \int_0^2 ((2x)^2 - (x^2)^2) dx = \pi \left(\frac{4}{3} x^3 - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{64\pi}{15}.$$

Chú ý: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



Thể tích khối tròn xoay tạo thành là: $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$.

Ví dụ 5: Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay xung quanh trục Ox .

Lời giải

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối tròn xoay được tính } V = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx.$$

Ví dụ 6: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm 2 đường cong:

$$-x^3 + 12x = -x^2 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Diện tích cần tìm là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx = \int_{-3}^0 |x^3 - x^2 - 12x| dx + \int_0^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx \\ &= \left| \int_{-3}^0 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| + \left| \int_0^4 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \right|_{-3}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \right|_0^4 \\ &= \left| \frac{-99}{4} \right| + \left| \frac{-160}{3} \right| = \frac{937}{12}. \end{aligned}$$

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 4 trang 123 – SGK. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh Ox :

$$\text{a) } y = 1 - x^2; y = 0. \text{ b) } y = \cos x; y = 0; x = 0; x = \pi. \text{ c) } y = \tan x; y = 0; x = 0; x = \frac{\pi}{4}.$$

Lời giải

$$\text{a) Phương trình hoành độ giao điểm của } y = 1 - x^2 \text{ và } y = 0 \text{ là } 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Thể tích của khối tròn xoay là $V = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1-2x^2+x^4) dx$

$$= \pi \left(x - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{15} \pi.$$

b) Thể tích của khối tròn xoay là $V = \pi \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$

c) Thể tích của khối tròn xoay là $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$

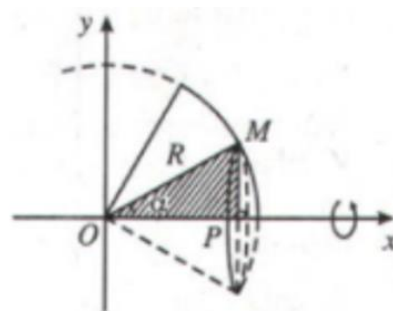
$$= \pi (\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

Bài 5 trang 123 – SGK. Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên Ox . Đặt $POA = \alpha$ và $OM = R$ $\left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, R > 0 \right)$. Gọi H là khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó xung quanh Ox

a) Tính thể tích của H theo α và R .

b) Tìm α sao cho thể tích H là lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có: $OP = R \cdot \cos \alpha$; $PM = R \cdot \sin \alpha$

Diện tích đáy của khối tròn xoay là $B = \pi PM^2 = \pi R^2 \cdot \sin^2 \alpha$

Thể tích của H là $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot OP = \frac{1}{3} \cdot R \cdot \cos \alpha \cdot \pi R^2 \cdot \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} \cdot \pi R^3 \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi R^3 (\cos \alpha - \cos^3 \alpha) \text{ với } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, R > 0.$$

b) Thể tích của H lớn nhất $\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^3 (\cos \alpha - \cos^3 \alpha)$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos \alpha - \cos^3 \alpha$ lớn nhất

Xét hàm số $f(t) = t - t^3$ với $t = \cos \alpha$; $t \in \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 1 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}}{3} (\text{nhận}) \\ t = -\frac{\sqrt{3}}{3} (\text{loại}) \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	

$\Rightarrow f(t)$ lớn nhất bằng $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ hay $V_{\max} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \cdot R^3$ khi $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

IV. Bài tập trắc nghiệm

Câu 11: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=1$, $y=0$ và $y=\sqrt{2x+1}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

A. $V = \int_0^1 (2x+1) dx$. B. $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$. C. $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$. **D. $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx$.**

Lời giải:

Chọn D

Ta có $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{2x+1})^2 dx = \pi \int_0^1 (2x+1) dx$.

Câu 12: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x \cdot \ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1$; $x=2$. Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V được xác định bởi

A. $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$. B. $V = \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx$. C. $V = \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$. D. $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi (H) : $\begin{cases} y = x \cdot \ln x \\ y = 0 \\ x = 1; x = 2 \end{cases}$ khi nó quay quanh trục hoành có thể tích V

được xác định bởi $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$.

Câu 13: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi(e^2+1)}{2}$. **B. $V = \frac{\pi(e^2-1)}{2}$.** C. $\frac{\pi e^2}{2}$. D. $V = \frac{e^2-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2-1)}{2}$.

Câu 14: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ xung quanh trục Ox là

A. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^x dx$. B. $V = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$. C. $V = \pi \int_0^1 x e^x dx$. **D. $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$.**

Lời giải:

Chọn D

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ($a < b$) xác định bởi:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Vậy, $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$.

Câu 15: Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. $\frac{3\pi}{2}$. B. 3π . C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải:

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành: $V = \pi \int_1^2 (\sqrt{x})^2 dx = \frac{3\pi}{2}$.

Câu 16: Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

A. $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt). **B. $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt).** C. $\frac{85\pi}{10}$ (đvtt). D. $\frac{41\pi}{7}$ (đvtt).

Lời giải:

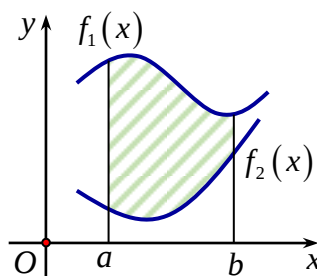
Chọn B

Ta có $3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$$V = \pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx = \pi \left(3x^3 - \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^3 = \frac{81\pi}{10} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 17: Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?



A. $V = \pi \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx.$

B. $V = \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx.$

C. $V = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx.$

D. $V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$

Lời giải:

Chọn C

Do $f_1(x) > f_2(x) \forall x \in (a; b)$

Câu 18: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^3 - x + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x + 1) dx.$

B. $V = \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 dx.$

C. $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 dx.$

D. $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x^2 + 1) dx.$

Lời giải:

Chọn C

Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 dx.$$

Câu 19: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ và $y = -\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V = \int_0^\pi \sin^2 x dx.$

B. $V = \pi \int_0^\pi |\sin x| dx.$

C. $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx.$

D. $V = \pi \left| \int_0^\pi (-\sin x) dx \right|.$

Lời giải:

Chọn C

Ta có thể tích của khối tròn xoay cần tính là $V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx.$

Câu 20: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 4$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{7\pi}{3}.$

B. $V = \frac{7}{6}.$

C. $S = 1.$

D. $V = \frac{7\pi}{6}.$

Lời giải:

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành $V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx = \pi \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx$

$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} x\sqrt{x} + x \right) \Big|_1^4 = \frac{7\pi}{6}.$$

B. LUYỆN TẬP

I. Chữa bài tập SGK

Bài 4 trang 123 – SGK. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh Ox :

a) $y = 1 - x^2$; $y = 0$. b) $y = \cos x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \pi$. c) $y = \tan x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$.

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 1 - x^2$ và $y = 0$ là $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Thể tích của khối tròn xoay là $V = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx$

$$= \pi \left(x - 2 \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{15} \pi.$$

b) Thể tích của khối tròn xoay là $V = \pi \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$

c) Thể tích của khối tròn xoay là $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$

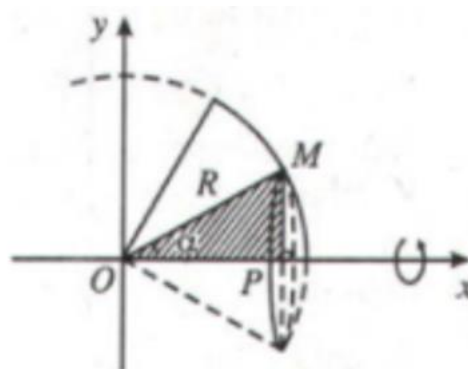
$$= \pi \left(\tan x - x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

Bài 5 trang 123 – SGK. Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên Ox . Đặt $\angle POA = \alpha$ và $OM = R$ $\left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, R > 0 \right)$. Gọi H là khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó xung quanh Ox

a) Tính thể tích của H theo α và R .

b) Tìm α sao cho thể tích H là lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có: $OP = R \cdot \cos \alpha$; $PM = R \cdot \sin \alpha$

Diện tích đáy của khối tròn xoay là $B = \pi PM^2 = \pi \cdot R^2 \cdot \sin^2 \alpha$

$$\text{Thể tích của } H \text{ là } V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot OP = \frac{1}{3} \cdot R \cdot \cos \alpha \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^3 (\cos \alpha - \cos^3 \alpha) \text{ với } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, R > 0.$$

b) Thể tích của H lớn nhất $\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^3 (\cos \alpha - \cos^3 \alpha)$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos \alpha - \cos^3 \alpha$ lớn nhất

Xét hàm số $f(t) = t - t^3$ với $t = \cos \alpha; t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

$$\text{Ta có } f'(t) = 1 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{3}}{3} & (\text{nhận}) \\ t = -\frac{\sqrt{3}}{3} & (\text{loại}) \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

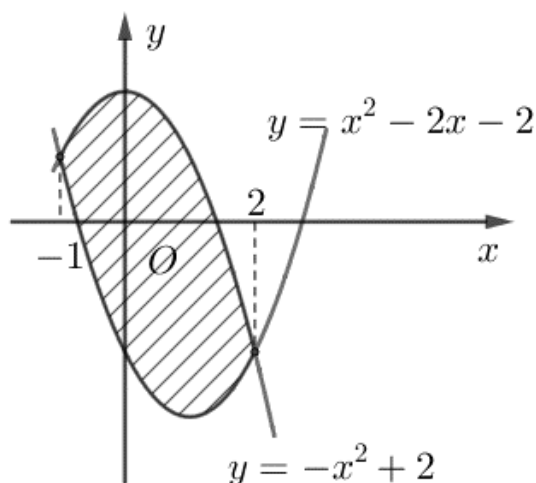
t	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$f'(t)$		+	0
$f(t)$		$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	

$\Rightarrow f(t)$ lớn nhất bằng $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Hay } V_{\max} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \cdot R^3 \text{ khi } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 21: [Mức độ 1] (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

B. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx.$

D. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx.$

Lời giải

Chọn A

Dựa và hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là:

$$\int_{-1}^2 \left[(-x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2) \right] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 22: [Mức độ 1] (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = -1$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

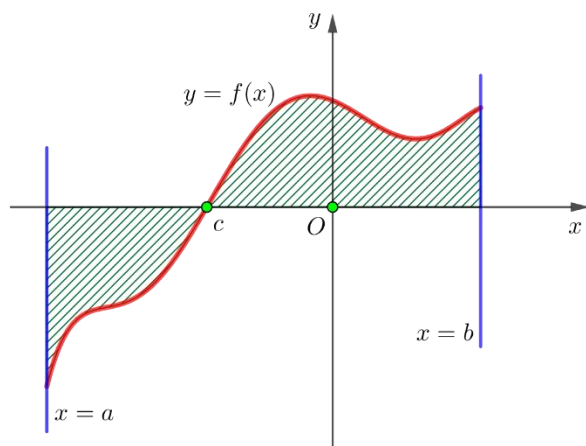
A. $S = \pi \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$. **B.** $S = \int_0^1 (2x^2 - 1) dx$. **C.** $S = \int_0^1 (2x^2 + 1)^2 dx$. **D.** $S = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^1 |2x^2 + 1| dx = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$ do $2x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in [0; 1]$.

Câu 23: [Mức độ 1] (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ trong hình dưới đây (phần gạch sọc) có diện tích S bằng



A. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

B. $\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

C. $-\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

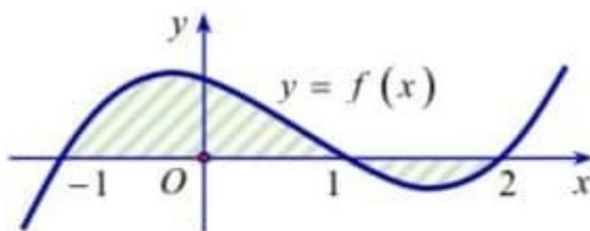
D. $-\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$.

Lời giải

Chọn C

$$S = \int_a^c (0 - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - 0) dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Câu 24: [Mức độ 1] (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2021) Gọi S là diện tích miền hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây, với $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.



Công thức tính S là

A. $S = -\int_{-1}^2 f(x) dx.$

B. $S = \left| \int_{-1}^2 f(x) dx \right|.$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

D. $S = \int_{-1}^2 f(x) dx.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

Câu 25: [Mức độ 1] (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Gọi (D) là hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = \frac{x}{4}, y = 0, x = 1, x = 4$. Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $\pi \int_1^4 \frac{x}{16} dx.$

B. $\pi \int_1^4 \frac{x}{4} dx.$

C. $\pi \int_1^4 \left(\frac{x}{4} \right)^2 dx.$

D. $\pi \int_1^4 \frac{x^2}{4} dx.$

Lời giải

Chọn C

♦ Thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục Ox được tính theo công thức

$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{x}{4} \right)^2 dx.$

Câu 26: [Mức độ 1] (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 1; x = 4$ quanh trục hoành được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $V = \pi^2 \int_1^4 x dx.$

B. $V = \pi \int_1^4 \sqrt{x} dx.$

C. $V = \pi \int_1^4 x dx.$

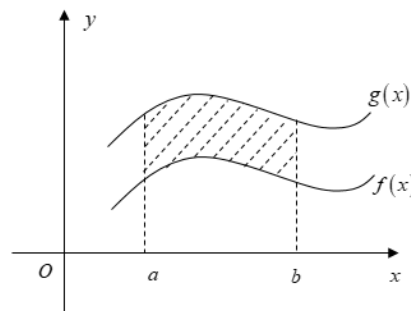
D. $V = \int_1^4 |\sqrt{x}| dx.$

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức SGK ta có $V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx.$

Câu 27: [Mức độ 1] (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Cho hình (H) được giới hạn như hình vẽ



Diện tích của hình (H) được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $\int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$

B. $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

C. $\int_a^b f(x) dx.$

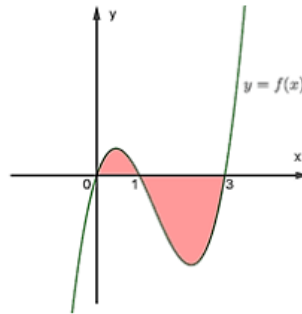
D. $\int_a^b g(x) dx.$

Lời giải

Chọn A

Diện tích của hình (H) là: $S = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$

Câu 28: [Mức độ 1] (THPT Quảng Xương 1-Thanh Hóa - 2021) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần tô đậm trong hình vẽ) là



A. $S = -\int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

B. $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

C. $S = \int_0^3 f(x) dx.$

D. $S = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

Lời giải

Chọn B

$$S = \int_0^3 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$$

Câu 29: [Mức độ 1] (THPT Nguyễn Đức Cảnh - Thái Bình - 2021) Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $f(x) = \sqrt{2x+1}$, Ox , $x = 0$, $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức?

A. $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx.$

B. $V = \int_0^1 (2x+1) dx.$

C. $V = \pi \int_0^1 (2x+1) dx.$

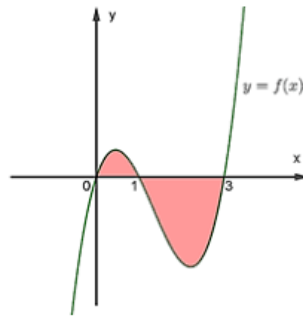
D. $V = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $V = \pi \int_0^1 (\sqrt{2x+1})^2 dx = \pi \int_0^1 (2x+1) dx.$

Câu 30: [Mức độ 1] (THPT Quảng Xương 1-Thanh Hóa - 2021) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần tô đậm trong hình vẽ) là



A. $S = -\int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

B. $S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

C. $S = \int_0^3 f(x) dx.$

D. $S = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

Lời giải

Chọn B

$$S = \int_0^3 |f(x)| dx = S = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$$

Câu 31: [Mức độ 2] (Chuyên KHTN - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 + x$ và đồ thị của hàm số $y = 2x + 2$ bằng

A. $\frac{1}{6}.$

B. $\frac{3}{2}.$

C. $\frac{53}{6}.$

D. $\frac{9}{2}.$

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + x = 2x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}.$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx = \frac{9}{2}.$

Câu 32: [Mức độ 2](Chuyên KHTN - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 3$ và parabol $y = 2x^2 - x - 1$ bằng

A. $\frac{13}{6}.$

B. $\frac{9}{2}.$

C. 9.

D. $\frac{13}{3}.$

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đường thẳng $y = x + 3$ và parabol $y = 2x^2 - x - 1$ là

$$x + 3 = 2x^2 - x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x + 3$ và parabol $y = 2x^2 - x - 1$ là

$$S = \int_{-1}^2 |(2x^2 - x - 1) - (x + 3)| dx$$

$$= \int_{-1}^2 |2x^2 - 2x - 4| dx$$

Ta có $2x^2 - 2x - 4 < 0, \forall x \in (-1; 2)$ nên

$$S = \int_{-1}^2 |2x^2 - 2x - 4| dx = - \int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx = - \left(\frac{2x^3}{3} - x^2 - 4x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{13}{3}.$$

Câu 33: [Mức độ 2] (Chuyên KHTN - 2021) Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = 2$ và đồ thị $y = x^2$ khi quay xung quanh trục Ox .

A. $\frac{4\pi}{5}$.

B. $\frac{5\pi}{6}$.

C. $\frac{32\pi}{5}$.

D. $\frac{\pi}{6}$.

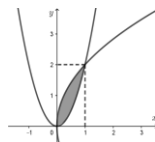
Lời giải

Chọn C

$y = x^2$ có điểm chung với Ox tại điểm có hoành độ $x = 0$.

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

Câu 34: [Mức độ 2] (Chuyên Quốc Học Huế - 2021) Tính diện tích của hình phẳng (được tô đậm) giới hạn bởi hai đường $y = 2x^2, y^2 = 4x$.



A. $S = \frac{2\pi}{3}$.

B. $S = \frac{4\pi}{3}$.

C. $S = \frac{4}{3}$.

D. $S = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Theo hình vẽ ta có $y^2 = 4x \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = 2x^2, y = 2\sqrt{x}$

$$2x^2 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị, diện tích của hình phẳng cần tính là

$$S = \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x^2) dx = \left(\frac{4}{3} x\sqrt{x} - \frac{2}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Câu 35: [Mức độ 2] (Chuyên Lê Hồng Phong - TPHCM - 2021) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh trục Ox .

A. $V = \frac{4}{3}\pi$.

B. $V = \frac{16}{15}$.

C. $V = \frac{4}{3}$.

D. $V = \frac{16}{15}\pi$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình: $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Suy ra: $V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{15}\pi$.

Câu 36: [Mức độ 2] (Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội- 2021) Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0$; $x=1$; $y=xe^x$; $y=0$ là

A. $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

B. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$.

C. $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$.

D. $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$.

Lời giải

Chọn A

Hình phẳng (H) : $\begin{cases} y = xe^x \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh Ox là

$V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 - 2x + 1) \right] \Big|_0^1 = \pi \cdot \left(\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

Câu 37: [Mức độ 2] (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2021) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

B. $V = \frac{\pi e^2}{2}$.

C. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$.

D. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là:

$V = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

Câu 38: [Mức độ 2] (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - 2021) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2-5x+6)$ và hai trục tọa độ bằng

A. $\frac{11}{4}$.

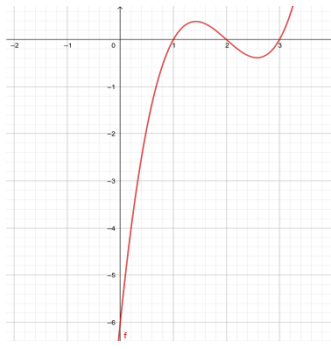
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{11\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $(x-1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm bằng

$$\begin{aligned} \int_0^3 |(x-1)(x^2-5x+6)| dx &= \int_0^3 |x^3-6x^2+11x-6| dx \\ &= \int_0^1 |x^3-6x^2+11x-6| dx + \int_1^2 |x^3-6x^2+11x-6| dx + \int_2^3 |x^3-6x^2+11x-6| dx \\ &= \int_0^1 (-x^3+6x^2-11x+6) dx + \int_1^2 (x^3-6x^2+11x-6) dx + \int_2^3 (-x^3+6x^2-11x+6) dx \\ &= \left(-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{11x^2}{2} + 6x \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x \right) \Big|_1^2 + \left(-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{11x^2}{2} + 6x \right) \Big|_2^3 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

Câu 39: [Mức độ 2] (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - 2021) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y=0$, $x=0$ và $x=\pi$. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

- A. π . B. π^2 . C. $\frac{\pi^2}{2}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Khối tròn xoay được sinh ra có thể tích là:

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Câu 40: [Mức độ 2] (THPT Đào Duy Từ - Hà Nội - 2021) Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ và trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{81}{10}$. C. $\frac{81\pi}{10}$. D. $\frac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

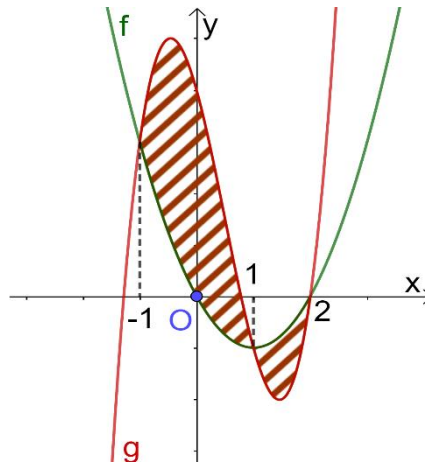
Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$ và trục Ox là nghiệm phương trình:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox bằng:

$$\pi \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)^2 dx = \pi \int_1^4 (x^2 - 5x + 4)^2 dx = \frac{81\pi}{10}.$$

Câu 41: [Mức độ 3] (Chuyên KHTN - 2021) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ và $g(x) = mx^2 + nx$ có đồ thị trong hình bên dưới.



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số trên (phần gạch chéo trong hình vẽ) bằng

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{37}{12}$.

C. $\frac{37}{6}$.

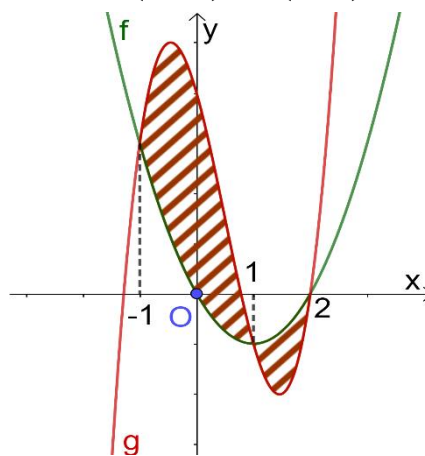
D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + 4 = mx^2 + nx \Leftrightarrow ax^3 + (b-m)x^2 + (c-n)x + 4 = 0$$



Đặt $h(x) = ax^3 + (b-m)x^2 + (c-n)x + 4$

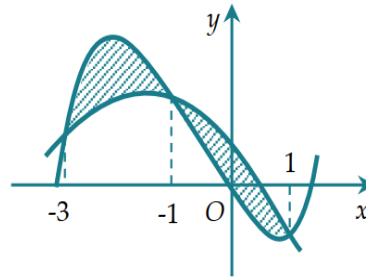
Vì $h(x) = 0$ có 3 nghiệm $x = 2, x = -1, x = 1$ nên $h(x) = a(x+1)(x-1)(x-2) = a(x^2 - 1)(x-2)$

Mà ta có $h(0) = 2a = 4 \Rightarrow a = 2$.

Suy ra $h(x) = 2(x^2 - 1)(x-2)$.

Vậy diện tích hình phẳng là $S = \int_{-1}^2 |h(x)| dx = \int_{-1}^2 |2(x^2 - 1)(x - 2)| dx = \frac{37}{6}$.

Câu 42: [Mức độ 3] (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2021) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = dx^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

♦ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là

$$ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2} = dx^2 + ex + 1 \Leftrightarrow ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - \frac{3}{2} = 0. (*)$$

♦ Do đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ nên phương trình (*) có ba nghiệm $x = -3; x = -1; x = 1$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -27a + 9(b-d) - 3(c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ -a + (b-d) - (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \\ a + (b-d) + (c-e) - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-d = \frac{3}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ c-e = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

♦ Vậy hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số đã cho có diện tích là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{-1}^1 (g(x) - f(x)) dx \\ &= \int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx \\ &= 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Câu 43: [Mức độ 3] (Liên trường Quỳnh Lưu - Hoàng Mai - Nghệ An - 2021) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, đường thẳng $y = x - 1$ và các đường thẳng $x = m$, $x = 2m$ ($m > 1$). Giá trị của m sao cho $S = \ln 3$ là

A. $m = 2$.

B. $m = 3$.

C. $m = 5$.

D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

$$\frac{x^2 - 2x}{x - 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Phương trình vô nghiệm, suy ra hai đồ thị hàm số không có giao điểm.

Như vậy diện tích hình phẳng cần tính là:

$$\begin{aligned} S &= \int_m^{2m} \left| \frac{x^2 - 2x}{x - 1} - (x - 1) \right| dx = \int_m^{2m} \left| \frac{-1}{x - 1} \right| dx = \int_m^{2m} \left| \frac{1}{x - 1} \right| dx. \\ &= \left| \int_m^{2m} \frac{1}{x - 1} d(x - 1) \right| = \left| \ln|x - 1| \right|_m^{2m} = \left| \ln|x - 1| \right|_m^{2m} = \left| \ln \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right) \right| \quad (\text{do } m > 1). \end{aligned}$$

$$\text{Theo đề bài } S = \ln 3 \Rightarrow \left| \ln \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right) \right| = \ln 3 \Rightarrow \ln \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right) = 3 \text{ hoặc } \ln \left(\frac{2m - 1}{m - 1} \right) = -\ln 3.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{2m - 1}{m - 1} = 3 \\ \frac{2m - 1}{m - 1} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 3(m - 1) \\ 3(2m - 1) = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{5} \end{cases} \quad (KTM).$$

Vậy $m = 2$.

Câu 44: [Mức độ 3] (Sở Vĩnh Phúc - 2021) Biết diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^{-x}$, $y = \frac{x}{3}$, $x = 0$ là $S = \frac{m}{3 \ln 3} - \frac{n}{6}$. Tính tổng $m + n$.

A. $m + n = 4$.

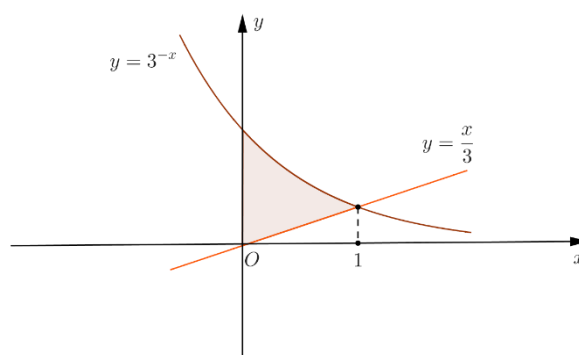
B. $m + n = 2$.

C. $m + n = 1$.

D. $m + n = 3$.

Lời giải

Chọn D



Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm số $y = 3^{-x}$, $y = \frac{x}{3}$

$$\Rightarrow 3^{-x} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{-x} = x \Leftrightarrow 3^{1-x} = x$$

Nhận thấy $x=1$ là 1 nghiệm

$$\text{Với } x > 1 \Rightarrow 1-x < 0 \Rightarrow 3^{1-x} < 3^0 \Rightarrow 3^{1-x} < 1 \Rightarrow VT < 1 < VP$$

$$\text{Với } x < 1 \Rightarrow 1-x > 0 \Rightarrow 3^{1-x} > 3^0 \Rightarrow 3^{1-x} > 1 \Rightarrow VP < 1 < VT$$

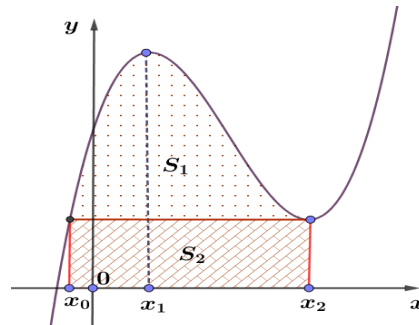
$\Rightarrow x=1$ là nghiệm duy nhất.

$$\Rightarrow S = \int_0^1 \left(3^{-x} - \left(\frac{x}{3} \right) \right) dx = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} - \frac{1}{6} x^2 \Big|_0^1 = \left(-\frac{3^{-1}}{\ln 3} - \frac{1}{6} \right) - \left(-\frac{1}{\ln 3} \right) = -\frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3 \ln 3} - \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow m=2; n=1$$

$$\Rightarrow m+n=3$$

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$. Đường thẳng song song với trục Ox và qua điểm cực tiểu cắt đồ thị hàm số tại điểm thứ hai có hoành độ x_0 và $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1 và S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch ở hình bên dưới).



A. $\frac{9}{8}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn A

+) Gọi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a > 0 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

+) Theo giả thiết ta có

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3a(x - x_1)(x - x_2) = 3a(x - x_1)(x - x_1 - 2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3a(x - x_1)^2 - 6a(x - x_1).$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + C.$$

$$\text{+) Ta có } f(x_1) - 3f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) - 3f(x_1 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow C - 3(8a - 12a + C) = 0 \Leftrightarrow -2C + 12a = 0 \Leftrightarrow C = 6a.$$

$$\text{Do đó } f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 6a.$$

+) S_2 là diện tích hình chữ nhật có cạnh bằng 3 và $f(x_2) = 8a - 12a + 6a = 2a$

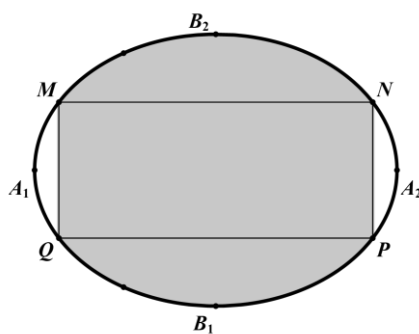
+) S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = x_0 = x_1 - 1$, $x = x_2 = x_1 + 2$, $y = f(x_2) = 2a$ và $f(x) = a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 6a$ nên suy ra

$$S_1 = \int_{x_1-1}^{x_1+2} [f(x) - 2a] dx = \int_{x_1-1}^{x_1+2} [a(x - x_1)^3 - 3a(x - x_1)^2 + 4a] dx$$

$$= \left[\frac{a(x - x_1)^4}{4} - 3a \frac{(x - x_1)^3}{3} + 4ax \right]_{x_1-1}^{x_1+2} = \frac{27a}{4}.$$

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{8}.$

Câu 46: [Mức độ 4] (Đề Tham Khảo 2019) Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 VNĐ / m² và phần còn lại 100.000 VNĐ / m². Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2 = 8\text{m}$, $B_1B_2 = 6\text{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3\text{m}$?



A. 5.526.000 đồng.

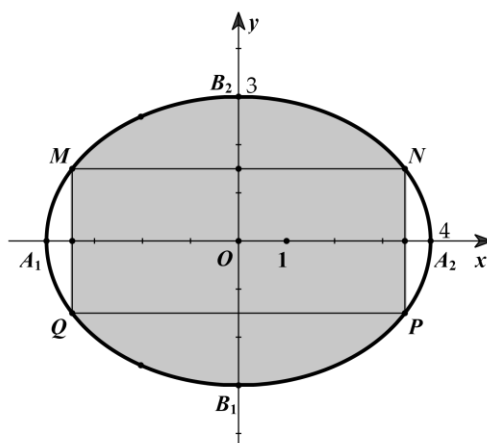
B. 5.782.000 đồng.

C. 7.322.000 đồng.

D. 7.213.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Với $\begin{cases} A_1A_2 = 8 = 2a \\ B_1B_2 = 6 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{16 - x^2}.$

Suy ra diện tích của hình elip là $S_{(E)} = \pi a.b = 12\pi \text{ (m}^2\text{)}.$

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật và $MQ = 3 \rightarrow M\left(x; \frac{3}{2}\right) \in (E)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 12 \rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right); N\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$$

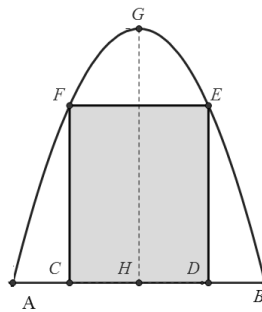
Gọi $S_1; S_2$ lần lượt là diện tích phần bị tô màu và không bị tô màu

$$\text{Ta có: } S_2 = 4 \cdot \frac{3}{4} \int_{2\sqrt{3}}^4 \sqrt{16-x^2} dx = 3 \int_{2\sqrt{3}}^4 \sqrt{16-x^2} dx \xrightarrow{x=4\sin t} S_2 = 4\pi - 6\sqrt{3} (\text{m}^2)$$

Suy ra: $S_1 = S_{(E)} - S_2 = 8\pi + 6\sqrt{3}$. Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$$T = (4\pi - 6\sqrt{3}) \cdot 100 + (8\pi + 6\sqrt{3}) \cdot 200 \approx 7.322.000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 47: [Mức độ 4] (Trần Phú - Quảng Ninh - 2020) Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4\text{m}$, chiều rộng $AB = 4\text{m}$, $AC = BD = 0,9\text{m}$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/m^2 , còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/m^2 . Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



A. 11445000 đồng.

B. 4077000 đồng.

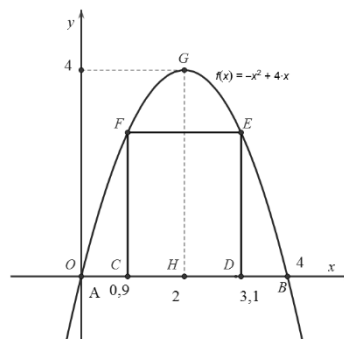
C. 7368000 đồng.

D. 11370000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a.2^2 + b.2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

$$\text{Diện tích của cả cống là } S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

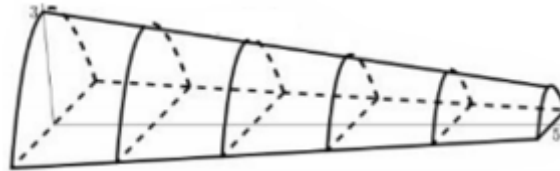
$$\text{Mặt khác chiều cao } CF = DE = f(0,9) = 2,79 \text{ (m)}; CD = 4 - 2.0,9 = 2,2 \text{ (m)}.$$

$$\text{Diện tích hai cánh cống là } S_{CDEF} = CD.CF = 6,138 \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$\text{Diện tích phần xiên hoa là } S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,14 = \frac{6793}{1500} \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$\text{Vậy tổng số tiền để làm cống là } 6,138.1200000 + \frac{6793}{1500}.900000 = 11441400 \text{ đồng.}$$

Câu 48: [Mức độ 4] (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Cho một mô hình 3-D mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5 (cm); khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



A. 29.

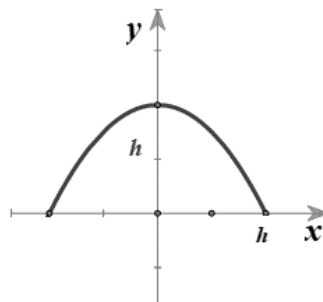
B. 27.

C. 31.

D. 33.

Lời giải

Chọn A



Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên.

$$\text{Parabol } (P) \text{ có phương trình } (P): y = ax^2 + h, (a < 0)$$

$$\text{Có } B(h;0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = ah^2 + h \Leftrightarrow a = -\frac{1}{h} \text{ (do } h > 0)$$

$$\text{Diện tích } S \text{ của thiết diện: } S = \int_{-h}^h \left(-\frac{1}{h}x^2 + h \right) dx = \frac{4h^2}{3}, \quad h = 3 - \frac{2}{5}x$$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2$$

Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$$\Rightarrow V = \int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2 dx \approx 28,888$$

$$\Rightarrow V \approx 29 \text{ (cm}^3\text{)}$$

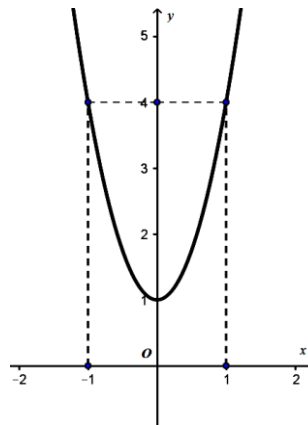
Câu 49: [Mức độ 4] (THPT Hậu Lộc 2 - 2018) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H = f(4) - f(2)$.

A. $H = 45$.

B. $H = 64$.

C. $H = 51$.

D. $H = 58$.



Lời giải

Chọn D

Theo bài ra $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) do đó $y = f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y = f'(x) = a'x^2 + b'x + c'$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có: } \begin{cases} c' = 1 \\ a' - b' + c' = 4 \\ a' + b' + c' = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 0 \\ c' = 1 \end{cases} \Rightarrow y = f'(x) = 3x^2 + 1.$$

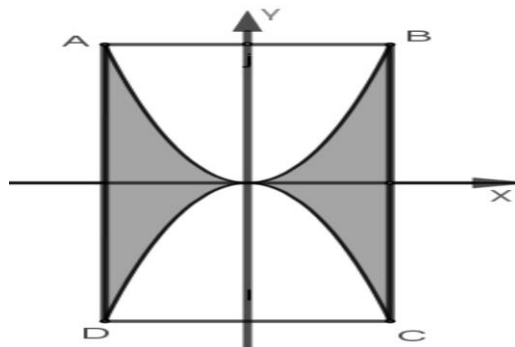
Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, trục Ox , $x = 4$, $x = 2$.

$$\text{Ta có } S = \int_2^4 (3x^2 + 1) dx = 58.$$

$$\text{Lại có: } S = \int_2^4 f'(x) dx = f(x) \Big|_2^4 = f(4) - f(2).$$

Do đó: $H = f(4) - f(2) = 58$.

Câu 50: [Mức độ 4] Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được đánh đá với giá thành $500.000đ/m^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$. Cho $AB = 4dm$; $BC = 8dm$. Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

A. 105660667 đ.

B. 106666667 đ.

C. 107665667 đ.

D. 108665667 đ.

Lời giải

Chọn A

Vì $AB = 4dm$; $BC = 8dm \Rightarrow A(-2; 4), B(2; 4), C(2; -4), D(-2; -4)$.

parabol là: $y = x^2$ hoặc $y = -x^2$

Diện tích phần tô đậm là $S_1 = 4 \int_0^2 x^2 dx = \frac{32}{3} (dm^2)$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 4.8 = 32 (m^2)$

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} (dm^2)$

Tổng chi phí trang trí là: $T = \left(\frac{32}{3} \cdot 5000 + \frac{64}{3} \cdot 2500 \right) \cdot 1000 \approx 106666667 đ$.